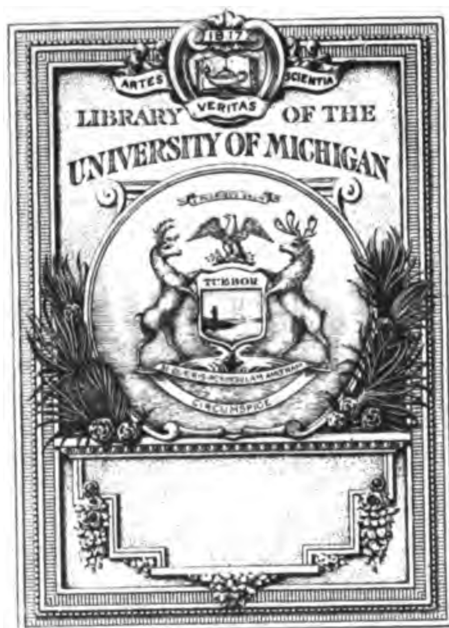

1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

JOANNIS ADOLFI TASSII,
Philosophi summi, & in Gymnasio, quod Hamburgi est,
olim Mathematum Professoris Clarissimi,

TRIGONOMETRIÆ CANONICÆ COMPENDIUM,

In usum Gymnasij Hamburgensis editum,
Ex
RECENSIONE
HENRICI SIVERI, HAMB.
Math. Prof. P.

Cujus Sciagraphia compendii hujus
præcedit.



HAMBURGI,
Sumtibus ZACHARIÆ HERTELII, Bibliopolæ;
Typis GEORGII REBENLINI, Senat. & Scholar. Typogr.
Anno Æræ Christianæ M DC LXXVI.

1676

TRIGÆ SCHOLARCHARUM NORMALI,

Putà VIRIS

1. *Nobilissimis, Amplissimis, atq; Consultissimis,*

DN. DITERICO MOLLERO. J.U.L.
DN. CASPARO WESTERMANNO. J. U. L.
DN. GEORGIO BECCELERO.
DN. ALBERTO WOLFIO.
à Magnifico Senatu Rei Scholasticæ Præfectis meritissimis.

2. *Admodùm Reverendis, Excellentissimis, Clarissimisq;*

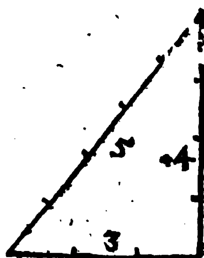
DN. M. GOTHOFREDO GESIO, Minist. Sen.
DN. D. DAVIDI KLUGIO.
DN. M. HERMANNO à PETKUM.
DN. D. ÆGIDIO STRAUCHIO, des.
Sacri Ordinis Primoribus, & Pastoribus Parœciarum vigilantissimis.

3. *Spectatissimis, Integerrimis & Prudentissimis,*

DN. NICOLAO KRULLIO, Præsidi h.t.
DN. JOACHIMO BOSTELMANNO.
DN. HERMANNO RENTZELIO.
DN. JOACHIMO ANKELMANNO.
DN. JUSTO BANDTIO.
DN. CORNELIO LANGERMANNO.
DN. CHRISTIANO BUSCHIO.
DN. JOANNI STAHLIO.
DN. GEORGIO KELLINGHUSIO.
DN. HENRICO MATFELDIO.
DN. JOANNI PAPIO.
DN. JOANNI ERLENKAMPIO.
Duodecim viris, Civiumq; Antistitibus laudatissimis.

PATRONIS, PROMOTORIBUS, FAUTORIBUSQ; ET MUSARUM HAMBURGENSIUM, ET SUIS ETIAM, HONORATISSIMIS

SALUTEM.



Cùm, Nobilissimi, Reverendi admodùm, & Spectatissimi Domini, TRIGA NORMALIS sit complexio trium quantitatum (vel numerorum, vel linearum) ita comparatarum, ut majoris quadratum quadratis reliquarum simul sumtis æquetur: Nobilissimumq; vestrum Collegium etiam ex tribus Ordinibus, & quidem ex iisdem, quibus Respublica nostra, constet; non ineptè illud æquè atq; hanc (Remp.) Trigæ normalis nomine insigniri posse puto. Præcipuo tamen jure Rempublicam nostram patriam, sic dici posse, nonnullæ hujus affectiones (quæ & Collegio vestro applicari suo modo possunt) affectionib9 Trigæ normalis similes sive analogæ arguunt, quarum unam alteramve licebit recensere.

Prima est Figuræ perfectæ constitutio. Sicuti enim tres lineæ cujuscunq; Trigæ normalis terminis suis cohærentes triangulum faciunt rectangulum, quæ figura est omnium rectilinearum prima, perfectissima & præstantissima; sic tres Reipublicæ nostræ Ordines, Nobil. Magistratus scilicet, Rev. Ministerium, & Spect. Civitas reliqua, probè juncti statum Reipublicæ rectum, id est, felicissimum, formant.

Altera

Altera affectio est partium in potentiis suis æquipollentia. Nam, quemadmodum in Triangulo hoc rectangulo catheti (lineæ minores) angulum rectum comprehendunt, quem subtendit hypotenusa (linea maxima) illarum æquale potens, ut Geometricè loquimur; sic Sacer Ordo Civili rectè insistit, eamq; rectitudinem Magistralis Ordo sive Magistratus studiosè tuetur, illis æquipollens, hoc est, sacrarum æquè ac civilium rerum curam debitam habens.

De reliquis quoq; trianguli rectanguli affectionibus, scil. de notitia anguli acuti unius ex alterutro noto: item de cognitione lateris tertii cujuscunq; ex duobus reliquis datis: ut & de æqualitate inter angulos duos acutos, quos hypotenusa cum cathetis utrinq; constituit, simul sumtos, & angulum rectum cathetis comprehensum, aliisq;, similis analogia exhiberi posset; verùm, cum prolixo mihi hîc esse non libeat, sciens ac volens eas prætereo.

Hoc tantum addo, quod ex hac vestrûm Triga singularem avorum nostrorum prudentiam, reiq; Scholasticæ æstimationem videre sit. Cùm enim, quod res est, Scholam ut civitatis seminarium fructus suos per omnes status atq; ordines diffundere perspexerint, hujus curam omni quoq; civitati, sive omnibus Reipublicæ Ordinibus demandatam voluerunt.

Rectè igitur agitis, & Reipublicæ inter alia optimè consulitis, qui Scholam collabi non permittitis, sed quod hactenus summa cum laude vestra fecistis, labanti succur-

 cur-

curritis, defectum ejus sine mora supplentes, auctoritatemq; Docentium, quæ in disciplinis plurimùm pollet, conservantes.

Quibus beneficiis vestris sit quod speratur, pristina quoq; accesserit liberalitas, quæ labores compenset, & suspiria caveat; omnino nihil erit, quod de uberrimo Scholæ nostræ, & Gymnasii fructu dubitare nos cogat: quandoquidem omnes pariter & Præceptores classici, & Gymnasij Professores debitâ diligentiâ atq; industriâ inter se certant, prosperum conatuum suorum successum à divina benignitate quàm certissimè sibi polliciti.

Ceterum, cùm & me dignum habueritis, qui non ita pridem omnium vestrûm consensu ac votis, inter Gymnasij vestri Professores numerarer; gratias ea propter ago habeoq;, quas possum, maximas. Referrem quoq;, nisi vestra hæc benevolentia vires excederet meas. Attamen ubi facultas mea officiosæ meæ voluntati non respondet, ibi alienam me advocare facile patiemini, qua defectus ille compensetur.

Quare, cùm hunc Trigonometricum Tractatum (laborem vestri quondam Professoris, Viri Clarissimi JOANNIS ADOLFI TASSII, Philosophi, dum viveret, summi, & de studiosa juventute vestra optimè meriti,) inter primas lectiones meas publicè explicandum, typisq;, in discentium gratiam, describendum susceperim, illum Collegio vestro Nobilissimo consecrare non dubitavi.

Acci-

Accipite igitur eundem, in qualecunq; meæ erga vos observantiæ testimonium, gratiq; animi, pro singulari vestro favore, indicium, atq;, uti cœpistis, sic deinceps quoq; me, ac studia mea vobis habete commendatissima: Ita vicissim vos omnes ac singulos SUMMA ac SANCTISSIMA TRIGA sive TRIAS omni, imprimis autem æternâ felicitate, cumulare dignabitur, id quod omnibus votis expetit

Dabam Hamburgi è museo meo, die 26 Maji, Anno Æra Christiana M DC LXXVI.

Nobiliß. Rev. pl. & Spectatiß. Dignitat. Vestr.

cultor devotus

HENRICUS SIVERUS
Math. Prof. P.

AD LECTOREM BENEVOLUM.

EN denuo, L. B. partem diligentiæ Tassianæ: Compendium scilicet Trigonometricum in usum Gymnasij nostri, à Viro Clarissimo JOANNE ADOLFO TASSIO *olim conscriptum. Scientiam illud exhibet, Geometriâ & Arithmeticâ amplissimis parentibus natam, reliquarum omnium scientiarum facilè principem. Dum enim circa Triangulorum enodationem versatur, usus ejus tum in Astronomia, tum in Geographia, tum in Geodæsia quoq;, & quæ huic connexa est Architectonica, civili pariter atq; militari, aliisq; scientiis maximus cernitur. Sed figuræ hic nullæ, nullaq; exempla sunt addita. Cujus rei si causam quæras, respondeo, illam contineri in libellis jam antea editis, qui Pars Geometriæ de Magnitudinum Proportione, Arithmetica Empirica, & Photica inscribuntur, ubi hâc in parte desiderio tuo satisfactum quodammodo videbis. Ne tamen debitam scientiæ præstantissimæ per figuras & exempla explicationem omnino tibi interdictam putes; promitto me & hanc tandem, (si per divinam gratiam licuerit,) quamprimum eandem post repetitam lectionem, ut ursa fœtum lambendo, perfecero, e penu mea utut exiguâ, adjecturum. Vale interim, meq; tibi commendatum habe.*

SCIA-

SCIAGRAPHIA TRIGONOMETRIÆ CANONICÆ in partes duas distinctæ.

PARS PRIOR agit *de Triangulis Rectilineis Planis* præmittensqve DEFINITIONES GENERALES, & primam quidem *Scientiæ hujus*, reliquas verò *Magnitudinum circulo adscriptarum*, putà *Subtensæ, Sinûs recti, Sinûs versi, tam majoris quàm minoris, Sinûs complementi, Sinûs totius* sive *Radii, Tangentis, Secantis, Complementi arcûs angulive* - - pag. 1, 2, & 3.

Subjungit pro fundamentis problematum THEOREMATA 15 - - - pag. 3, 4, 5, 6

Hinc sequuntur PROBLEMATA primùm GENERALIA 5, *de propositi arcûs angulive ascriptis inveniendis* - - pag. 7 & 8

Deinde SPECIALIA 12, quæ *proponunt invenienda*

1. in triangulis rectangulis

PROBL. 1. *Angulum utrumq; acutum*, ex datis cathetis - pag. 9.

PROBL. 2. Eosdem, ex datis hypotenusa & una catheto. pag. 10.

PROBL. 3. *Cathetum utramq;*, ex datis hypotenusa & angulorum alterutro. - - pag. ead.

PROBL. 4. *Cathetum unam*, ex datis altera catheto, & hypothenusa - - pag. 11.

PROBL. 5. Eandē, ex datis catheto reliqua & angulo, qui catheto quæsitæ opponitur. - - pag. ead.

PROBL. 6. *Hypotenusam*, ex datis catheto alterutra & angulo huic adjacente - - pag. ead.

PROBL. 7. Eandem, ex utraqve catheto datâ. - pag. 12.

Huic annexum est MONITUM de LOGARITHMIS.

2. In triangulis obliquangulis.

PROBL. 8. *Angulum tertium & latera duo reliqua*, ex datis duobus angulis & latere uno. - pag. 13.

PROBL. 9. *Angulum tertio lateri oppositum unà cum latere hoc*, ex datis duobus lateribus & angulo alterutri opposito. - - - - pag. 14.
PROBL. 10. *Angulos reliquos & latus tertium*, ex datis duobus lateribus cum angulo comprehenso. - pag. 15.
PROBL. 11. *Segmenta basis à perpendiculari facta angulosq; omnes*, ex datis lateribus - - pag. 17.
PROBL. 12. *Proportiones laterum*, ex datis angulis. - pag. 19.

PARS POSTERIOR, agens *de Triangulis Sphæricis* præmittit DEFINITIONES *Trianguli Sphærici, Circuli Sphæræ maximi, Polorum Circuli, Anguli Sphærici, Trianguli Rectanguli, Birectanguli, Trirectanguli, Quadrantalis, Biquadrantalis, Triquadrantalis, Trianguli obliquanguli, Complementi lateris, Complementi Anguli, Complementi Trianguli, Punctorum Circuli oppositorum, Hypotenusæ & cathetorum in Triangulis sphæricis, Triangulorum cohærentium sive copulatorum* - - - - - - pag. 20. & 21.
Hinc exhibet fundamentorum loco THEOREMATA 24. à - - pag. 22. ad 26.
Cum MONITO GENERALI *de dimensione Triangulorum sphæricorum rectangulorum* - - pag. 27.
Seqvuntur tandem PROBLEMATA 25, quibus
Proponuntur investiganda
1. in triangulis rectangulis.
PROBL. 1. *Cathetus*, ex datis hypotenusâ & angulo sibi opposito. - - - - - pag. 27.
PROBL. 2. Eadem, ex hypotenusâ & angulo sibi adjacente - - - - pag. 28.
PROBL. 3. Eadem, ex datis hypotenusâ & altera catheto. p. ead.
PROBL. 4. Eadem, ex datis altera catheto & angulo sibi opposito - - - - pag. ead.
PROBL. 5. Eadem, ex altera catheto & angulo sibi adjacente. - - - - - pag. 29.
Probl.

PROBL. 6. Eadem utraq; ex dato utroq; angulo acuto. p. ead.
PROBL. 7. *Hypotenusa*, ex datis alterutra catheto & angulo huic opposito. - - - pag. 30.
PROBL. 8. Eadem, ex datis catheto & angulo eidem adjacente. - - - - pag. ead.
PROBL. 9. Eadem, ex data utraq; catheto. - - pag. 31.
PROBL. 10. Eadem, ex dato utroq; angulo acuto. - pag. ead.
PROBL. 11. *Angulus*, ex datis hypotenusa & catheto sibi opposita. - - - - pag. 32.
PROBL. 12. Idem, ex datis hypotenusa & catheto sibi adjacente - - - pag. ead.
PROBL. 13. Idem, ex datis hypotenusa & angulo altero acuto - - - pag. 33.
PROBL. 14. Idem, ex data utraqve catheto. - pag. ead.
PROBL. 15. Idem, ex altero angulo acuto & catheto sibi opposita datis - - pag. 34.
PROBL. 16. Idem, ex altero angulo acuto & catheto sibi adjacente datis. - - - pag. 35.
Excipiunt hoc MONITVM alterum *de reliquis Triangulis rectangulis*, quæ obvenire præterea possunt. - - pag. ead.
& THEOREMATA 7 *de Triangulis obliquangulis* - pag. 36 & 37
perguntqve inde problemata reliqua, quibus porrò *investiganda proponuntur*. & quidem

2. *In triangulis obliquangulis*.
PROBL. 17. *Latus*, ex datis latere & angulis sibi & dato lateri oppositis. - - - pag. 37.
PROBL. 18. *Angulus*, ex datis angulo & lateribus sibi datoqve angulo oppositis. - - pag. 38.
PROBL. 19. *Latus*, ex datis reliquis lateribus cum angulo ab hisce comprehenso - - - pap. 39.
PROBL. 20. *Angulus* quilibet, ex datis omnibus lateribus, p. 42.
Adhærent huic MONITA 4.
PROBL. 21. *Latera*, ex datis omnibus angulis, - - pag. 44.
Probl.

PROBL. 22. *Angulus*, ex datis duobus lateribus cum angulo ab iisdem comprehenso - - - pag. 46.
PROBL. 23. *Angulus*, ex datis reliquis angulis cum latere hisce adjacente - - - pag. 47.
PROBL. 24. *Latus*, ex datis reliquis lateribus cum angulo alterutri opposito.
PROBL. 25. *Angulus*, ex datis reliquis angulis, cum latere alterutri opposito. - - - pag. 48.

ERRATA.

Pag. 6. *Lin.* 10 *pro* 12, *lege* 13.
Pag. 13. *Lin.* 23. *pro* per probl. 5 *lege*, per probl. 3. & hinc porrò segmentum reliquum, per probl. 5.
Pag. 14. *Lin. antepen. pro* Sinus; provenienti *lege*, Sinui provenienti
Pag. 16. *Lin.* 1 *pro* 15 *lege* 16.
Lin. 25, *pro* Mod. 3 *lege* Mod. 4.
Pag. 23. *Lin.* 2 *pro* sun *lege* sunt
Pag. 27. *Lin.* 12 *pro* dato *lege* datâ
Pag. 44. *Lin.* 21 *pro* latera *lege* sunt.
Pag. 45. *Lin.* 2 *pro* 180 *lege* 180 gradus.



JOAN.

JOH. ADOLFI TASSII

TRIGONOMETRIÆ CANONICÆ COMPENDIUM,

PARS PRIOR,

De Triangulorum Planorum Dimensione.

DEFINITIONES.

I.



Rigonometria est Scientia Mathematica, quæ proportiones peripheriarum & arcuum inter se, atque ad magnitudines ascriptas, sive rectas circularibus configuratas, considerat, indeque dimensiones Triangulorum in numeris deducit.

Nota. Illius partes duæ sunt; *Syntactica* & *Canonica*. *Prior* est, quæ ex Geometricis principiis proportiones ascriptarum sive configuratarum inter se atque ad Peripherias sive arcus eruit, easq; in numeris ad assumptam circuli diametrum relatas determinat; Sive, quæ constructionem Canonis triangulorum docet. *Posterior*, quæ, Canone jam constructo ad triangulorum dimensiones utitur: Unde etiam nomen habet.

2. *Ascripta* sive *configurata circularibus recta* dicuntur, cum inter se vel uno vel pluribus terminis communibus cohærent.

Nota. Hujusmodi sunt rectæ, quæ vel totæ intra circulum cadunt, ùt Subtensæ, & Sinus: vel totæ extra, ùt Tangentes: vel ex parte intra, ex parte extra, ùt Secantes. Quarum omnium Series columnis sive laterculis suis distinctæ, atque ad Peripheriæ partes gradibus ac minutis expressas accommodatæ *Canon Triangulorum*, itemque *Tabula Sinuum, Tangentium* ac *Secantium* appellantur. Quid autem *Gradus* in circulo sint, notum ex Geometria Empirica est. Horum singuli 60 minutis sive scrupulis æstimantur, quæ *minuta prima* vocari solent; & quodlibet primum 60 *minutis secundis*; atque ità porrò.

III. *Subtensa* sive *Chorda* dicitur recta arcûs in peripheria propositi terminos connectens. Et hinc *Subtendere* dicitur *Recta Arcum*, cujus terminos connectit.

IV. *Sinus rectus* dicitur semissis subtensæ dupli arcûs. Sive, dicitur recta ab altero arcus termino in diametrum per reliquum terminum ductam perpendicularis. Vocatur etiam simpliciter *Sinus*, item *Sinus primus*.

V. *Sinus versus* dicitur pars diametri inter alterum arcûs terminum & Sinum rectum ejusdem arcus intercepta. Interdum etiam *Sagitta* vocatur. Estque dupla, *minor* & *major*.

VI. *Sinus versus minor* dicitur Sinus versus arcûs quadrante minoris. Contrà, *Sinus versus major* dicitur Sinus versus arcûs quadrante majoris.

VII. *Sinus Complementi* dicitur Sinus rectus arcûs, qui cum proposito arcu quadrantem peripheriæ complet. Aliàs *Sinus secundus* nominatur.

VIII. *Sinus totus* dicitur Sinus rectus vel versus quadrantis peripheriæ. Sive, dicitur semidiameter circuli. Aliàs etiam *Radius*, itemque *Sinus maximus* nominatur.

IX. *Tan-*

IX. *Tangens* dicitur recta in extremam diametrum ad alterum arcûs terminum ductam perpendiculariter insistens, & intercepta diametro per terminum reliquum extensa. Nonnulli *Prosinum* vocant.

X. *Secans* dicitur recta ex centro arcûs per alterum ejus extremum usque ad concursum *Tangentis* ejusdem arcûs producta. A quibusdam *Transsinuosa* appellatur.

XI. *Sinus rectus, versus, Complementi,* itemque *Tangens & Secans anguli* alicujus dicitur Sinus rectus, versus, complementi, Tangens, Secans illius arcus, cui propositus angulus insistit.

XII. *Complementum arcûs* dicitur arcus, quo propositus aliquis arcus â quadrante vel semicirculo differt. Sic quoque *Complementum anguli* dicitur angulus, quo propositus angulus â recto vel etiam â duobus rectis differt.

Nota. Dicuntur ita: quia cum proposito arcu vel angulo conjuncta, ibi quidem quadrantem aut semicirculum; hic verò angulum rectum aut duos rectos complent. Quoties autem simpliciter nominatur complementum arcûs vel anguli, intelligitur complementum ad quadrantem aut angulum rectum.

THEOREMATA.

1. Eadem est subtensa duorum arcuum peripheriam complentium. Sic quoque idem est Sinus rectus duorum arcuum semiperipheriam constituentium.

2. Subtensarum maxima est diameter; Sinuum verò rectorum maximus, semidiameter.

3. Sinus complementi æquatur segmento Radii inter centrum arcûs & ejusdem Sinum rectum intercepto.

4. Sinus versus minor radio minor est: & contrà major, radio major.

Consect: Duorum igitur arcuum semiperipheriam complentium, quorum idem est Sinus rectus, diversi sunt versi sinus.

5. Sinus versus minor cum sinu complementi ejusdem arcus æqualis est semidiametro. At Sinus versus major semidiametrum eodem hoc sinu excedit.

6. In triangulo rectangulo plano quadratum hypotenusæ æquatur aggregato quadratorum super Cathetis descriptorum.

Consect:1. Latus igitur sive radix quadrata hujus summæ æquatur hypotenusæ: Et subtractô unius catheti quadrato à quadrato hypotenusæ, latus sive radix residui est cathetus altera.

Consect:2. Sequitur hinc etiam, Sinum rectum & Sinum complementi arcûs propositi æque posse radio.

7. Si Triangulum rectangulum circulo ascribatur, assumptâ hypotenusâ pro radio & alterutro ejusdem termino pro centro; catheti fiunt Sinus recti angulorum oppositorum. Si verò altera cathetus pro radio assumatur manente centro; cathetus reliqua fit Tangens, hypotenusa Secans anguli acuti, qui assumptæ catheto adjacet.

Consect: Datâ igitur vel hypotenusâ vel alterutrâ catheto cum altero acutorum angulorum; dantur latera reliqua ex proportione, quæ asscriptis illis cum lateribus & angulis intercedit. Et contrà, datis duobus lateribus, datur utervis angulus acutus, ex eadem causa.

8. In Triangulis planis universis latera eandem inter se proportionem habent, quam Sinus recti angulorum, quos ea latera subtendunt.

Consect. Ut igitur est latus unum ad latus alterum; sic est Sinus anguli, quem latus unum subtendit, ad Sinum anguli,

guli, quem subtendit latus alterum. Et contrà,

9. In quolibet Triangulo plano, aggregatum duorum quorumvis laterum ità se habet ad differentiam eorundem; ùt Tangens dimidiæ summæ angulorum hisce lateribus oppositorum ad Tangentem dimidiæ differentiæ eorundem angulorum.

Consect: Datis igitur in Triangulo duobus lateribus cum angulo ab ipsis comprehenso; dantur etiam reliqui duo anguli, calculo, ùt est in Theoremate, instituto.

10. In plano quovis triangulo ùt est Sinus totus ad Sinum versum cujuslibet anguli: ità quoque est duplum rectangulum sub cruribus illius anguli ad excessum, quo quadratum basis sive lateris tertii superat quadratum differentiæ crurum.

Consect: Quare datis iterum duobus trianguli lateribus cum angulo, quem continent; notus fiet excessus quadrati basis sive lateris tertii supra quadratum differentiæ crurum; indeque porrò basis ipsa sive latus tertium in cognitionem veniet.

11. Si in quolibet plano triangulo perpendicularis à vertice in oppositum latus ducatur, erit; ùt basis ad aggregatum crurum: ità differentia crurum, ad differentiam segmentorum basis, cùm perpendicularis intrà cadit: ad productam verò basin, cùm extrà.

Consect: Datis igitur tribus trianguli lateribus; datur tum differentia segmentorum basis, tum basis continuata, ipsaque continuatio.

12. Si in triangulo plano perpendicularis à quovis angulo demissa cadat intra triangulum; Summa quadratorum basis & cruris utriuslibet, diminuta quadrato cruris reliqui, æquatur duplo rectangulo sub tota basi & ejusdem

segmento, quod cruri primùm sumpto conterminum est. Si verò perpendicularis extra cadat; differentia inter quadratum maximi lateris & summam quadratorum sub reliquis lateribus est æqualis duplo rectangulo sub basi ejusque continuamento.

Consect: Datis itaque tribus lateribus trianguli; datur utrumlibet segmentum basis, itemque ejus continuamentum.

12. In triangulo quocunque plano ita est duplum rectangulum, sive productum duorum laterum ad differentiam inter quadrata horum laterum simul sumpta & quadratum lateris tertii; ut Sinus totus ad Sinum complementi illius anguli, quem latera inter se multiplicata continent.

Consect; Quare datis iterum tribus lateribus; notus fiet ex proportione theorematis angulus quilibet, qui lateribus inter se multiplicatis comprehenditur.

N. Si aggregatum quadratorum sub duobus lateribus æquatur quadrato lateris tertii; angulus ab illis lateribus comprehensus est rectus.

14. In triangulo acutangulo perpendicularis à quovis angulo ducta cadit intra triangulum. In obtusangulo demissa ab alterutro acuto extrà cadit; ab obtuso, intrà.

15. In triangulo rectangulo alter acutorum angulorum est complementum reliqui ad angulum rectum, sive 90. gradus. In quovis verò triangulo duo quilibet anguli simul sumti sunt complementum tertii ad duos rectos, sive 180. gradus.

PROBLEMATA GENERALIA.

I. *Arcûs cujuslibet in partibus peripheriæ (hoc est, gradibus ac minutis) dati ascriptas Canoni trian-*

gulorum

gulorum insertas, sive Sinum, Tangentem & Secantem in eodem Canone invenire.

Quia in Canone Pitisci minori (quo nunc utemur) omnibusque aliis ad eam formam dispositis, gradus à primo usque ad 45tum summam paginam obtinent; indè verò usque ad quadrantem sive 90, imam; quos illic minuta prima in sinistro margine descendendo, hic in margine dextro ascendendo sequuntur, appositis ad singula minuta in eodem versu ascriptis, quæ gradibus simul ac minutis debentur: idem, quod vult problema, in ejusmodi Canonibus hoc modo perficietur.

Adeatur pagina, in cujus vel summo vel imo dati gradus occurrunt, indeque deorsum aut sursum in minutorum serie progrediendo (prout nempe gradus vel semiquadrantem superant, vel ab eo deficiunt) minuta adhærentia quærantur. Numeri enim illis à latere appositi exhibebunt in suis singuli columnis ascriptam, quæ proponitur inquirenda.

Quòd *si nulla adfuerint minuta*; sumantur in dextra pagina numeri, quibus o est proposita; in sinistra autem, quibus 60, sed hic eo modo, ut unitas datis gradibus detrahatur.

Si verò *arcus* datus *quadrante major* fuerit; eo a semiperipheria sive 180 gradibus subducto, fiat cum residuo, quod dictum est; & postea ascriptæ inventæ numerus Radii, ad quem constructus est Canon, addatur.

Vicissim, *si data alicui ascripta* (sive Sinus sit, sive Tangens, sive Secans) *respondens arcus postuletur*; inquiratur ea in columna suæ denominationis. Gradus enim & minuta, quæ sinister margo offert inventæ ascriptæ apposita, arcum, quem volumus, indicabunt.

At

At si data ascripta in columna sua praecise non extet; sumatur ea, quae minimum à data differt: Huic enim adjuncti graduum ac minutorum numeri quàm proximè arcum quaesitum exhibebunt.

II. Dati arcûs Subtensam, & contrà, datae Subtensae arcum convenientem invenire.

Dividatur arcus bifariam, & Sinus rectus bisegmenti dupletur; duplum hoc erit Subtensa quaesita, ex def: 3tia.

Contrà, *si detur Subtensa quaeratur autem arcus, cui illa subtenditur;* secetur Subtensa bifariam; bisegmentum enim erit Sinus rectus dimidii arcus, ejusque duplum arcus ipse, per eandem.

III. Dati arcus vel anguli Sinum versum inquirere. Et contrà.

Si datus *arcus angulusve* fuerit *quadrante minor*, auferatur Sinus complementi à sinu toto f Radio: Residuum erit Sinus versus, quem volumus, per th. 5.

Si verò *arcus angulusve* datus *quadrante major* fuerit; addatur Sinus excessus supra quadrantem ad Sinum totum Canonis; quod producitur, erit iterum Sinus versus, per idem Theor.

Contrà. *Si dati Sinus versi* quadrante *minoris* arcus angulusve respondens postuletur; subtrahatur Sinus ille à Sinu toto Canonis; ità remanebit Sinus complementi. Hujus arcus à quadrante sive 90 grad. detractus exhibebit arcum quaesitum, per theor. 3 & 5 hujus.

Si verò *Sinus versi* quadrante *majoris* arcus desideretur; auferatur Sinus totus Canonis à dato hoc Sinu; quod restat erit Sinus excessus supra quadrantem. Hujus arcus 90 gradibus additus producet arcum quaesitum per eadem theoremata.

PRO-

PROBLEMATA SPECIALIA.

I. *Triangulorum rectangulorum.*

Nota. Quanquam methodus Geometrica non nisi unicum problema hic poscit, generaliter propositum (*Datis tribus quibusque præter tres angulos in triangulo plano; reliqua tria invenire*) cujus deinde varii casus ordine recenseantur, ac numeris aptentur: quia tamen ea doctrinæ ratio discentium studijs non adeò commoda videtur; placet Didacticæ leges hic potiùs observare, & casuum illorum varietatem ad separata problemata reducere, ut hoc modo omnia fiant distinctiora, & confusio evitetur.

INVENTIO ANGULORUM.

I. *Datis Trianguli Rectanguli cathetis; utrumque angulum acutum invenire.*

Mod. 1. Assumatur Cathetus angulo quæsito adjacens pro Radio; ut reliqua fiat Tangens ejusdem anguli, atque ex theoremate septimo proportio ita ordinetur:

Ut cathetus quæsito angulo adjacens ad cathetum eidem oppositam; ita Radius ad tangentem quæsiti anguli.

Quæ in Canone △lorum exhibebit angulum ipsum, atque è regione complementum, sive alterum angulum acutum.

Mod. 2. Vel ex theoremate 9. Inventâ summâ & differentiâ cathetorum, fiat in proportionum regula:

Ut summa cathetorum ad differentiam eorundem; ita Tangens dimidiata summæ angulorum iis oppositorum (nempe 45 grad.) ad Tangentem dimidiatæ differentiæ illorum angulorum.

Sublatâ igitur totâ differentiâ à 90 grad.; erit residui

 semis-

semissis angulus minor. Huic autem addita differentia majorem constituet.

II Datâ hypotenusâ, & alterâ catheto; eosdem angulos acutos investigare.

Mod. 1. Problema hoc duplici ratione expediri potest, prout hypotenusa vel cathetus assumitur pro Radio. Si hypotenusa fiat Radius; proportio ex theoremate 7timo & 8ctavo erit hujusmodi:

Ut hypotenusa data, ad datam cathetum; ità Radius ad Sinum anguli catheto datæ oppositi.

Si verò cathetus data fiat Radius; proportio ità instituatur:

Ut cathetus data ad hypotenusam datam; Sic Radius ad Secantem anguli datæ catheto adjacentis.

Invento autem hoc angulo, alter quoque invenietur per theorema 15 hujus.

INVENTIO CATHETORUM.

III. Datâ hypotenusâ & altero acutorum angulorum; utramque cathetum invenire.

Mod. 1. Quia in triangulo rectangulo ex theor. 15 dato uno angulorum acutorum, etiam alter datur, positâ igitur hypotenusâ pro Radio, proportio ad theor. 7 vel 8vum ordinetur hoc modo:

Ut Radius ad Sinum anguli quæsitæ catheto oppositi; ità hypotenusa data ad cathetum quæsitam.

Mod. 2. Vel, positâ catheto quæsitâ pro Radio, fiat:

Ut Secans anguli quæsitæ catheto adjacentis, ad Radium; ità hypotenusa data ad quæsitam cathetum.

IV. Da-

IV. Datâ hypotenusâ & alterutra catheto; inquirere reliquam.

Mod. 1. A quadrato hypotenusæ subducatur quadratum catheti datæ. Residui latus, sive radix quadrata, cathetum quæsitam aperiet.

Mod. 2. Vel, per probl: 2dum hujus, investigetur alter angulus acutus, indeque per proxime præcedens, aut sequens problema, cathetus desiderata.

V. Datâ alterutrâ catheto & angulo, qui reliqua opponitur; alteram hanc cathetum invenire.

Mod. 1. Assumptâ catheto pro Radio, fiat itidem ex theor. 7.

Ut Radius ad Tangentem anguli quæsita catheto oppositi; ità cathetus data ad quæsitam.

Mod. 2. Vel fiat ex theoremate octavo:

Ut Sinus anguli catheto data oppositi ad Sinum anguli quæsita catheto oppositi; sive ad Sinum complementi; ità cathetus data ad quæsitam.

INVENTIO HYPOTENUSÆ.

VI. Datâ alterutrâ catheto, & angulo acuto eidem adjacente; hypotenusam inquirere.

Mod. 1. Positâ catheto datâ pro Radio, instituatur hujusmodi proportio:

Ut Radius ad Secantem anguli data catheto adjacentis; ità hæc cathetus ad hypotenusam quæsitam.

Mod. 2 Vel ex theoremate 8vo, hoc modo

Ut Sinus anguli data catheto oppositi ad Radium; ità data cathetus ad hypotenusam inquirendam.

VII. Datâ utrâq; catheto; hypotenusam investigare.

Mod. 1. Addantur quadrata cathetorum. Summæ latus, vel radix quadrata, erit hypotenusa ex theor. 6to,

Mod. 2. Vel inquiratur primùm alteruter angulus acutus per probl. primum hujus. Et deinde hypotenusa per probl: proxime præcedens.

Mod. 3. Vel etiam ad duplum productum cathetorum addatur quadratum differentiæ earundem. Aggregati radix est hypotenusa.

MONITUM. Quia ex *Logarithmorum* usu, (numeri sunt, definiente Briggio, qui proportionalibus adjuncti, æquales servant differentias,) non parùm facilitatis calculo Trigonometrico accedit: Ideo, si quis illos in dimensione triangulorum adhibere cupit, rem ità instituat. Dispositis quos problema præscribit, numeris arcuum ac laterum datorum; desumantur ex logarithmorum Canone logarithmi asscriptarum (sive Sinus sint, sive Tangentes, sive Secantes, sive etiam latera Triangulorum) quarum proportione problema solvendum est. Deinde, ubi in calculo adscriptarum vulgari multiplicatio requiritur, ibi addantur Logarithmi ex Canone desumpti: ubi divisio, ibi alter ab altero subtrahatur; ubi radicis quadratæ extractio, ibi dimidietur logarithmus ei serviens. Quod enim proveniet, in Canone illo Logarithmorum quæsitum, dabit in proposito quolibet triangulo, tàm sphærico, quàm plano, idem cum vulgari calculo.

2. TRIAN-

2. TRIANGULORUM OBLIQUANGULORUM.

VIII. Datis in triangulo obliquangulo duobus angulis & latere uno; angulum tertium, ac latera reliqua invenire.

Mod. 1. Aggregatum datorum angulorum subtrahatur à 180 gradibus; residuum erit angulus tertius, ex theor. 15.

Ut verò latera inveniantur, proportio ex theor. 8vo instituatur hoc modo:

Ut Sinus anguli lateri dato oppositi ad Sinum anguli lateri quæsito oppositi; ità latus datum ad quæsitum.

Quod hinc invenietur in partibus dati lateris.

N. Si alter datorum angulorum est obtusus; sumatur ejus complementum ad duos rectos, cum utriusq; idem sit Sinus rectus, per theor. 1.

Mod. 2. Reductione ad rectangula.

Cas. 1. Invento, per th. 15, angulo tertio demittatur perpendicularis ab alterutro termino dati lateris in basin sive latus oppositum. *Quæ si intra triangulum cadat*, (quod ex th. 12. facilè patebit,) inquiratur tum segmentum lateri dato conterminum, tum perpendicularis ista, per probl. 5. Addito deinde utroque segmento, innotescet latus, quod primò quærebatur. Latus autem reliquum invenietur per probl. 6 vel 7.

Cas. 2. Si verò perpendicularis extra triangulum cadat, productâ basi sive latere, in quod illa incidit, usq; ad communem sectionem cum perpendiculari; investigetur tum

hæc ipsa perpendicularis, tum basis continuata, per probl. 3; segmentum verò externum sive continuamentum, per probl. 5. Eo a. subtracto à tota basi productâ; remanebit segmentum internum, sive latus ipsum, quod primò quæritur. Latus verò tertium problema 6 vel 7 exhibebit.

IX. Datis trianguli obliquanguli duobus lateribus, & angulo alterutri opposito; angulum reliquo lateri oppositum unâ cum latere tertio inquirere.

Mod. 1. Ex Theoremate octavo fiat hoc modo:

Ut latus dato angulo oppositum ad latus alterum; ità Sinus anguli dati ad Sinum anguli quæsiti.

Qui in Canone exhibebit angulum ipsum; isque cum dato angulo compositus & summâ à 180 gradibus detractâ, erit, quod relinquitur, angulus tertius. Unde per problema proximè antecedens tertium quoque latus innotescet.

MONITUM.

Si datus angulus fuerit acutus, & latus eidem oppositum minus eo altero, quod angulo quæsito subtenditur; ambiguum est, utrùm angulus qui quæritur sit acutus, an obtusus, cùm utrique idem Sinus rectus respondeat, per Th. 1. In hoc igitur casu danda etiam anguli inveniendi species est, utrùm nempe acutus vel obtusus sit.

Cas. 1. Nam, *si acutus* fuerit; Sinus quarto proportionis loco proveniens dabit in Canone angulum ipsum, ùt habetur in problemate.

Cas. 2. *Si* verò *obtusus* detur; erit complementum anguli, in Canone Sinus; provenienti respondentis, ad duos rectos quæsitus ille angulus.

Quod si data latera fuerint inter se æqualia, aut latus

dato acuto angulo oppositum majus altero latere dato; aut etiam angulus, qui datur, obtusus; quæsitus semper acutus est, nec problema ulteriori determinatione indiget.

Mod. 2. Aliter reductione ad rectangula.

Cas. 1. Deducatur perpendicularis in latus ignotum ab opposito apice, *eâq; intra* triangulum *cadente;* investigetur primò tum perpendicularis, tum segmentum basis dato angulo adjacens per probl. 3. Postea ex perpendiculari & altero latere dato inquiratur angulus utervis ignotus huic lateri adjacens, per probl. 2 hujus, indèque porrò segmentum basis reliquum, per probl. 4 & 5.

Cas. 2. Quod *si* perpendicularis *extra* triangulum *cadat*, eâ inventâ per probl: 3; inquiratur basis producta per probl: 3 sive 4. Anguli verò ignoti per probl: 2. Denique continuamento per probl. 4 s. 5 investigato; subtrahatur id de tota basi antea inventa, & relinquetur latus tertium.

X. Datis in triangulo obliquangulo duobus lateribus, & angulo ab iisdem comprehenso; reliquos duos angulos, latusq; tertium investigare.

Mod. 1. Subducatur datus angulus à duobus rectis s. 180 gradibus; residui semissis est dimidia summa angulorum inveniendorum, cujus Tangens in Canone quæratur. Additis deinde etiam ac subtractis invicem datis lateribus, ut eorum summa ac differentia innotescat, ordinetur indè proportio ex theor 9 hoc modo:

Ut summa laterum datorum ad eorundem differentiam; ità Tangens dimidiæ à summæ angulorum quærendorum ad Tangentem anguli, quo minor quærendus ab hac dimidia summa deficit, major eandem superat.

Si

Si igitur angulus ille in Canone inventus à dimidia summa auferatur; remanebit angulus dato minori lateri oppositus. Sin eidem dimidiæ summæ addatur, proveniet angulus oppositus majori lateri. Latus verò tertium cognitis angulis inquiratur per probl. 8 antecedens.

Mod. 2. Idem verò latus sine ope illorum angulorum etiam hoc modo inveniri potest. Multiplicetur Sinus versus dati anguli per duplum productum datorum crurum, eoque per Radium diviso, addatur quoto quadratum differentiæ laterum. Nam radix quadrata ex aggregato extracta indicabit latus quæsitum.

Mod. 3. Vel, quod idem efficit, Sinus complementi dati anguli ducatur in duplum productum crurum, & quod prodit Radio dividatur. Quotus dabit differentiam inter quadrata crurum, & quadratum basis sive lateris desiderati. Ea autem differentia subtrahitur à quadratis crurum simul junctis, *si angulus* datus est *acutus*: iisdem verò additur, *si obtusus*, atque ex utroque radix quadrata extrahitur.

MONITUM. Si latera data sint inter se æqualia nullâ opus Trigonometriâ in quærendis angulis. Subtracto enim angulo dato à duobus rectis, & residuo bisecto; erit uterque angulus bisegmento æqualis.

Mod. 3. Reductione ad Rectangula.

Cas. 1. Demittatur perpendicularis ab alterutro angulo ignoto in latus oppositum. *Ea a. intra* triangulum *cadente*, inveniatur, ùt in proxime antecedentibus problematibus, tum perpendicularis illa; tum segmentum basis dato angulo adjacens, per probl. 3. hujus; & hinc porrò segmentum reliquum subductione inventi à totâ basi.

Pòst

Pòst in altero triangulo investigetur, per 1. probl: hujus uterlibet angulus ignoto lateri adjacens, indeq;, per probl: 6 vel 7, latus ipsum.

Cas.2. At *si* perpendicularis *cadat extra* triangulum; eâ inventâ, quæratur primùm angulus basi continuatæ oppositus, (siquidem latus alterum datum cum perpendiculari ducta illum angulum contineat,) indeq; basis ipsa. Vel etiam continuámentum, si crus alterum hujus anguli sit latus ignotum: & deinde angulus alteruter quæsitus. Angulus autem reliquus, & latus tertium ignotum hinc invenientur, ùt in superioribus expositum est.

XI. *Datis lateribus Trianguli obliquanguli; segmenta basis à perpendiculari facta, omnesq; angulos invenire.*

Cas.1. Mod.1. Assumatur latus maximum pro basi, additisq; ac subtractis inter se duobus reliquis lateribus, ut proveniat summa ac differentia eorundem, instituatur ex theor. 11. hujusmodi proportio.

Ut latus maximum pro basi assumptum ad summam laterum reliquorum; ità differentia eorundem laterum ad differentiam segmentorum basis.

Eâ igitur à basi detractâ, relinquitur duplum segmenti minoris, hujusq; bisectione ipsum segmentum minus prodibit. Cui si eadem differentia addatur, proveniet majus segmentum. Cognitis autem hoc modo segmentis; anguli per probl: 2. innotescent.

Cas.1 Mod.2. Per Theor: 12.

De summa quadratorum lateris maximi & utriuslibet reliquorum, subtrahatur quadratum lateris 3tii, residuumque per duplum maximi lateris dividatur. Quo-

tus dabit segmentum lateri primùm sumpto contermi- num. Hoc ergo detractum de toto latere maximo re- linquet segmentum alterum. Unde anguli demo per se- cundum probl: invenientur.

Nota. Si differentia quadratorum numero pari ex- primatur; ejus dimidium compendiosiùs dividetur per ma- ximum latus simplum.

MONITUM. Quòd maximum latus pro basi hic eligitur, fit propterea, ne perpendicularis extra triangu- lum cadat. Id verò si non curetur, perinde est, quod- nam latus basis locum obeat.

Cas. 2. Assumpto autem pro libitu alio latere; hoc attendatur oportet, si, peractâ ad præscriptum problematis operatione, priori modo quartus proportionis numerus proveniat major basi, alterum angulum ad basin, qui nem- pe majori reliquorum laterum opponitur, esse obtusum, & perpendicularem extra triangulum cadere ad obtusum hunc angulum. Quare, subtractâ basi ab invento illo nu- mero, residui semissis erit segmentum externum, sive con- tinuamentum. Anguli a. reperientur per probl: 2. ut in su- perioribus exemplis expositum est. In posteriori a. modo perpendicularis itidem extrà cadit, cùm summam quadra- torum basis atq; alterutrius lateris excedit quadratum la- teris tertii. Si igitur tunc summa illa quadratorum subtra- hatur à quadrato tertii lateris, & residuum per duplam basin dividatur; prodibit continuamentum, & hinc tota basis producta.

Mod. 3. Si, datis lateribus trianguli, non tam segmen- ta basis, quam angulus aliquis desideretur; calculus ex the-

or-

orem; & breviùs ità institui poterit. Invento tum duplo producto crurum anguli quæsiti, tum differentiâ inter aggregatum quadratorum è cruribus & quadratum basis; fiat indè proportio hujusmodi:

Ut duplum productum crurum quæsiti anguli ad differentiam inter quadrata crurum conjuncta, & quadratum basis; ità Radius ad Sinum complementi anguli, quem volumus.

Mod. 4. Vel, si quis Sinu verso uti malit, operatio fieri poterit hoc modo:

De quadrato lateris quæsito angulo oppositi subtrahatur quadratum differentiæ laterum reliquorum, additisqve ad residuum tot zyphris, quot constat Radius; dividatur totus numerus per duplum productum eorundem laterum. Quotus enim proveniens erit Sinus versus anguli, quem cognitum cupimus.

XII. Datis omnibus trianguli plani rectilinei angulis; proportionem laterum definire.

Cùm per th: 8 latera eandem inter se proportionem habeant, quam Sinus recti oppositorum angulorum; excerpantur è Canone datorum angulorum Sinus: ii enim quæsitam laterum proportionem aperient.

MONITUM. Quanquam in triangulis sphæricis ex datis angulis investigari latera possunt, ùt in sequentibus videbimus; id tamen in rectilineis non procedit. In his enim infinita triangula per 18, VI Euclidis construi possunt, assumptis aliis atqve aliis rectis pro basi, triangulo datorum laterum similia. Quod si etiam in quovis triangulo BCD, cujus anguli dantur, ducatur ex quolibet puncto F alterutrius lateris, v. g. BC, basi BD parrallela FG, ea descabit triangulum FCG toto BCD minus, eidem tamen

men æquiangulum; cùm angulus ad C sit communis, & anguli CFG & CGF æquentur angulis ad B & D per 29 Lib. I. Euclidis, sive per 7 theor. primæ Sectionis Geometriæ Empiricæ.

TRIGONOMETRIÆ CANONICÆ

PARS POSTERIOR.

De Triangulorum Sphæricorum Dimensione.

DEFINITIONES.

I.

TRiangulum Sphæricum est, quod in superficie sphærica describitur. Vel, si usum Trigonometricum spectemus, est triangulum, cujus latera sunt arcus maximorum in sphæra circulorum.

II. *Circulus Sphæra Maximus* dicitur, qui idem cum sphæra centrum habet. *Minor* contrà, cujus centrum à sphæræ centro diversum est.

III. *Polus circuli sphærici* dicitur punctum in superficie sphæræ, à quo omnes lineæ rectæ ad peripheriam illius circuli ductæ inter se æquantur.

IV. *Angulus Sphæricus* dicitur, qui in superficie sphæricâ existit, sive, (ex usu Trigonometrico,) cujus crura sunt arcus maximorum circulorum in sphæra.

V. *Triangulum Sphæricum Rectangulum* dicitur, cujus unus saltem angulus est rectus. Et hoc ipsum, si unicum

tan-

tantùm rectum habeat, strictiore vocis usu *Rectangulum* vocari solet: Si duos, *Birectangulum*; Si omnes tres, *Trirectangulum*.

VI. *Triangulum Quadrantale* dicitur, cujus unum latus est quadrans circuli maximi. Sic *Biquadrantale* est, cujus duo latera sunt quadrantes. *Triquadrantale*, cujus omnia tria latera quadrantes sunt.

VII. *Triangulum Sphaericum Obliquangulum* dicitur, cujus nullus angulus est rectus. Et *Acutangulum* quidem illud, cujus omnes anguli sunt acuti. *Obtusangulum*, cujus vel unus, vel duo, vel etiam omnes tres anguli sunt obtusi.

VIII. *Complementum lateris in Triangulo Sphaerico* dicitur arcus, quo latus à quadrante, vel semicirculo differt.

IX. *Complementum Anguli acuti* dicitur, quod eidem ad rectum sive 90 grad. deest. *Complementum obtusi* verò, quod huic ipsi deest ad duos rectos, sive 180 gradus.

X. *Triangulum △li complementum* sive *△lum △lo oppositum* dicitur, cùm utriusqve eadem basis est, & crura unius sunt crurum alterius complementa ad semicirculos.

XI. *Puncta circuli opposita* dicuntur, quæ eadem diameter connectit. Sive, quæ sunt extrema ejusdem diametri.

XII. *Hypotenusa in Triangulo Sphaerico Rectangulo* (ex analogia rectanguli plani) dicitur latus angulo recto oppositum. Latera verò rectum continentia, *Catheti*.

XIII. Si hypotenusa & alterutra cathetus usq; ad quadrantes continuatæ jungantur arcu, ex vertice comprehensi anguli tanquam centro descripto, duo contigua Triangula, quæ hinc oriuntur, *Cohærentia* sive *copulata Triangula* vocantur; cathetus autem continuata, *Basis*; reliqua, *Cathetus Minor*; & descriptus arcus, *Cathetus Major* dicitur.

THEOREMATA.

1. Trianguli sphærici singula latera sunt semicirculo minora.

2. Circulus quisque maximus à suis polis utrinque quadrante circuli maximi distat. Minores autem circuli ab altero suorum polorum minus quadrante, ab altero plus absunt.

Not. Quod de circulis tum hic tum in sequentibus theorematibus enunciatur, id accipiendum etiam est de eorundem peripheriis, nisi quid aliter moneatur.

3. Circuli maximi in eadem sphæra inter se æquales sunt, seque mutuo ac sphæram totam bisecant. Et contrà: si sphæram ac sese mutuò bisecant; sunt maximi.

4. Duo circuli sphærici, quorum alter per alterius polos transit, ad angulos rectos sese intersecant. Et vicissim. Si ad angulos rectos sese mutuò secent; alter transit per alterius polos.

5. Si anguli sphærici crura porrò ac retrò usque ad concursum continuentur, semicirculi proveniunt: suntq; anguli ad verticem, & quos crura continuata ad concursum comprehendunt, angulo proposito æquales.

Consect. Continuatis igitur binis quibusque lateribus Trianguli sphærici usq; ad concursum, provenient tria illius trianguli complementa, quæ angulos in vertice atque in concursu angulis crurum continuatorum æquales habent.

6. Angulum sphæricũ mensurat arcus peripheriæ maximæ, quem ex vertice anguli tanquam centro descriptum crura usque ad quadrantes producta intercipiunt.

Consect. Si igitur crus unum vel utrumque quadrantem superet; dempto excessu, erit arcus inter residuos quadrantes anguli propositi mensura.

7. Tri-

7. Trianguli sphærici tres anguli simul sumpti sunt duobus rectis majores. In Triangulo autem rectangulo Anguli quinque rectis minores sunt.

Consect. Ex hoc igitur & theoremate 5to patet; Ex datis tribus angulis sphæricis triangulum non efformari, nisi & ipsi conjunctim sumpti, & binorum quorumque complementa reliquo tertio addita, duos angulos rectos excedant.

8. In Triangulo sphærico rectangulo, cujus singula latera sunt quadrante minora, reliqui duo anguli sunt acuti. Et contrà si reliqui duo anguli sint acuti, singula latera quadrante minora erunt.

9. Si Trianguli rectanguli sphærici duo reliqui anguli sint obtusi; latera his opposita sunt quadrantibus majora: tertium, quod recto opponitur, quadrante minus est. Et vicissim: Si in hujusmodi triangulo duo latera quadrantibus majora sint; anguli oppositi sunt obtusi.

10. Si in Triangulo sphærico rectangulo cathetus altera, vel utraque est quadrans; etiam hypotenusa quadrans erit. Si verò utraque minor vel major sit quadrante; hypotenusa erit quadrante minor: Sin altera major, altera minor quadrante fuerit; erit hypotenusa quadrante major. Et contrà; Si in triangulo rectangulo hypotenusa sit quadrans; erit utraque, vel saltem altera cathetus, quadrans. Si verò minor quadrante; cathetus utraque minor vel major quadrante erit. Sin denique (hypotenusa) major quadrante fuerit; erit cathetus altera major, altera minor quadrante.

11. Si rectanguli Trianguli cathetus altera est quadrans; angulus eidem oppositus erit rectus, indeque Tri-

angulum birectangulum. Si verò quadrante minor, angulus oppositus est acutus: si quadrante major; obtusus. Et contrà.

12. Birectanguli duo latera angulos rectos subtendentia sunt quadrantes. Et contrà: Si Trianguli sphærici duo latera sint quadrantes; oppositi anguli erunt recti.

Consect. Trirectanguli igitur omnia tria latera sunt quadrantes: & vice versa.

13. Si birectanguli reliquus angulus acutus fuerit: tertium latus quadrante minus est. Si verò obtusus; quadrante majus. Et contrà: Si birectanguli tertium latus fuerit quadrante minus; angulus reliquus erit acutus; si quadrante majus; obtusus.

14. Trianguli sphærici rectanguli cum duobus acutis angulis, cujus catheti continuantur, complementum est rectangulum cum duobus obtusis: Si verò catheus una & hypotenusa producantur; rectangulum cum acuto & obtuso. Vicissim: Complementum rectanguli cum duobus obtusis, in quo catheti continuantur, est rectangulum cum duobus acutis. Catheto autem altera & hypotenusâ continuatis; rectangulum cum acuto & obtuso.

15. At rectanguli cum acuto & obtuso, cujus catheti producuntur, complementum est rectangulum proposito simile, cum acuto nempe & obtuso. Si verò crura anguli obtusi producantur; rectangulum cum duobus obtusis: cruribus autem anguli acuti productis, rectangulum cum duobus acutis.

16. Birectanguli, cujus tertius angulus est acutus, complementum est birectangulum cum angulo obtuso. Et contrà: Birectanguli cum angulo obtuso complementum est birectangulum cum acuto, si in utroque alter quadrans

&

& latus tertium minus vel majus quadrante continuentur. Si verò ipsi quadrantes producantur; complementum est proposito Triangulo simile. Trirectanguli autem complementum semper trirectangulum est.

17. **In Triangulis sphæricis universis Sinus laterum Sinibus oppositorum angulorum sunt directè proportionales.**

18. **In Triangulis rectangulis cohærentibus Sinus hypotenusarum ac cathetorum inter se directè proportionales sunt.**

19. **In iisdem rectangulis cohærentibus Sinus basium & Tangentes cathetorum inter se directè proportionales sunt.**

20. **In triangulis sphæricis universis ut est quadratum Radii ad rectangulum sub sinibus rectis duorum quorumqve laterum inter se inæqualium comprehensum; ità quoqve est Sinus versus anguli à lateribus illis contenti ad differentiam inter Sinum versum tertii lateris, & sinum versum, quo duo priora latera differunt.**

Nota: Vocari hæc differentia à nonnullis *Sinus differentialis* solet.

21. **Si duorum arcuum, singulatim quadrante minorum, minor tum addatur, tum subtrahatur complemento majoris; erit differentia sinuum, aggregato & residuo debitorum, dupla quarti proportionalis, si arcus minor defecerit à complemento: Summa verò, si complementum excesserit.**

22. **Arcus maximi circuli, inter polos duorum circulorum itidem maximorum interjectus, æquatur angulo ab iisdem (circulis) ad communem sectionem comprehenso.**

Consect: Trianguli igitur sphærici latera in angulos & anguli in latera converti possunt; si pro lateribus quadrante minoribus anguli acuti partium numero iisdem (lateribus) æquales, & pro angulis latera sumantur; pro lateribus autem quadrante majoribus, aut angulo obtuso, complementa ad semicirculos.

23. In Triangulo sphærico rectangulo Radius est medio loco proportionalis inter Sinum rectum propositi arcûs vel anguli & Secantem complementi ejusdem: itemque inter Sinum complementi & Secantem propositi arcus angulive.

24. In eodem Triangulo rectangulo Radius est medio loco proportionalis inter Tangenté arcûs angulive propositi & Tangentem complementi ejusdem: Et sic etiam contrà, inter Tangentem complementi, & arcûs angulive propositi.

Nota: In sphæricis locum quoque habent Libri primi Euclid. Propos. 4, 5, 6, 13, 15, 18, 19, 20, 24, 25, 26. Si pro lineis rectis arcus circulares, & pro triangulis planis sphærica assumantur: Quarum demonstrationes videantur apud Regiomontanum Lib 3. de triangulis: & Clavium Tractatu de triangulis sphæricis.

MONITUM GENERALE.

De Triangulorum Sphæricorum Rectangulorum Dimensione.

Per sequentia problemata non nisi ea *rectangula* solvuntur, *quorum duo reliqui anguli sunt acuti*, atque adeò *singula latera quadrante minora*. Theoremata autem, quibus illo-

illorum triangulorum dimensio expeditur, sunt 17, 18, 19, 20, & quæ sequuntur. Si verò Data & Quæsita in proposito triangulo proportionem theorematibus illis expressam non exhibeant; instituenda est continuatio, quoad vel triangulum simplex, vel duo copulata triangula proveniant, in quibus proportio solutioni apta comparet. De reliquorum autem rectangulorum dimensione monebitur in calce problematum.

PROBLEMATA, PRO INVENTIONE CATHETORUM.

I. Dato in Triangulo Sphærico rectangulo hypotenusa, & angulo acuto, qui catheto quæsitæ opponitur; invenire hanc cathetum.

Mod. 1. Fiat ex theoremate decimo septimo vel 18.

Ut Radius sive Sinus anguli recti ad Sinum hypothenusæ datæ; ità Sinus anguli dati ad Sinum Catheti huic oppositæ.

Mod. 2. Per theorema vigesimum.

Dividatur rectangulum sub complementis hypotenusæ & anguli dati per Radium. Quod prodit, addatur ad Sinum versum differentiæ eorundem complementorum. Aggregatum dabit Sinum versum sui lateris. Unde latus ipsum per problemata generalia facilè invenietur.

Mod. 3. Vel etiam ex theoremate 21.

Datum minus (sive angulus sit, sive hypotenusa) complemento majoris addatur & subtrahatur. Semissis residui vel aggregati Sinuum, prout complementum minus aut majus fuerit dato minori, exhibebit Sinum catheti quæsitæ.

II. Datâ hypotenusâ & angulo acuto, quæsitæ catheto adjacente; invenire hanc cathetum.

D 2 *Mod.*

Mod. 1. Fiat ex theoremate decimo nono.

Ut Sinus complementi anguli dati ad Tangentem complementi hypotenusæ datæ; ità Radius ad Tangentem complementi catheti quæsitæ.

Mod. 2. Vel, Radio ad primum locum retracto, per theorema 23. in priori parte proportionis.

Ut Radius ad Secantem anguli dati; ità Tangens complementi hypotenusæ datæ ad Tangentem complementi catheti quæsitæ.

Mod. 3. Vel etiam ità, per theorema decimum nonum.

Ut Radius ad Tangentem hypotenusæ datæ; ità Sinus complementi anguli dati ad Tangentem catheti quæsitæ.

III. Datâ hypotenusâ, & alterâ catheto; investigare reliquam.

Mod. 1. Fiat ex theoremate decimo septimo vel decimo octavo.

Ut Sinus complementi datæ catheti ad Sinum complementi hypotenusæ datæ; ità Radius ad Sinum complementi quæsitæ catheti.

Mod. 2. Vel per theorema 23, Radio ad initium retracto.

Ut Radius ad Secantem datæ catheti; ità Sinus complementi hypotenusæ datæ ad Sinum complementi quæsitæ catheti.

Mod. 3. Vel etiam.

Ut Radius ad Secantem datæ hypotenusæ; ità Sinus complementi datæ catheti ad Secantem catheti quæsitæ.

IV. Datâ alterâ catheto, & angulo, qui reliquæ opponitur; inquirere hanc reliquam.

Mod. 1. Fiat ex theoremate decimo nono.

Ut

Ut Sinus catheti data ad Tangentem complementi anguli dati; ità Radius ad Tangentem complementi quæsitæ catheti.

Mod.2. Vel, transposito radio in primum locum per theor.24.

Ut Radius ad Secantem complementi datæ catheti; ità Tangens complementi anguli dati ad Tangentem complementi quæsitæ catheti.

Mod.3. Vel ità, ex theoremate decimo nono.

Ut Radius ad Tangentem anguli dati; ità Sinus catheti data ad Tangentem catheti quæsitæ.

V. Datâ alterâ catheto, & angulo reliquæ adjacente; reliquam hanc invenire.

Mod.1. Fiat ex theoremate decimo nono.

Ut Tangens anguli dati ad Radium; ità Tangens catheti datæ ad Sinum catheti quæsitæ.

Mod.2. Vel, Radio ad initium reducto, per theorema 24.

Ut Radius ad Tangentem complementi anguli dati; ità Tangens catheti datæ ad Sinum catheti quæsitæ.

Mod.3: Vel etiam.

Ut Radius ad Tangentem complementi catheti datæ; ità Tangens anguli dati ad Secantem complementi catheti quæsitæ.

VI. Dato utroq; angulo acuto; utramlibet cathetum investigare.

Mod.1. Ex theoremate decimo septimo vel 18 fiat;

Ut Sinus anguli quæsitæ catheto adjacentis ad Sinum complementi anguli reliqui; ità Radius ad Sinum complementi quæsitæ catheti.

Mod.2. Vel, transposito Radio, per theor.25.

Ut Radius ad Secantem complementi anguli quæsitæ catheto adjacentis; ita Sinus complementi anguli reliqui ad Sinum complementi quæsitæ catheti.

Mod. 3. Vel deniqve.

Ut Radius ad Sinum anguli quæsitæ catheto adjacentis; ita Secans anguli reliqui ad Secantem catheti quæsitæ.

PRO INVENTIONE HYPOTENUSÆ.

VII. Datâ alterutrâ catheto, & angulo huic opposito; hypotenusam reperire.

Mod. 1. Ex theoremate decimo septimo. Fiat,

Ut Sinus anguli dati ad Radium; ita Sinus datæ catheti ad Sinum hypotenusæ quæsitæ.

Mod. 2. Vel etiam, revocato ad primum locum Radio, per theor. 23.

Ut Radius ad Secantem complementi anguli dati; ita Sinus datæ catheti ad Sinum hypotenusæ quæsitæ.

Mod. 3. Vel etiam,

Ut Radius ad Sinum anguli dati; ita Secans complementi catheti datæ ad Secantem hypotenusæ quæsitæ.

IIX. Datâ catheto alterutrâ cum angulo eidem adjacente; hypotenusam inquirere.

Mod. 1. Fiat ex theoremate decimo nono,

Ut Sinus complementi anguli dati ad Radium; ita Tangens datæ catheti ad Tangentem hypotenusæ quæsitæ.

Mod. 2. Vel, protracto ad primum locum Radio, per theor. 23.

Ut Radius ad Secantem anguli dati ita Tangens datæ catheti ad Tangentem hypotenusæ quæsitæ.

Mod. 3. Vel aliter, per theorema 19.

Ut

Ut Radius ad Tangentem complementi catheti datæ; ità Sinus complementi anguli dati ad Tangentem complementi quæsitæ hypotenusæ.

IX. *Datâ utraque catheto; hypotenusam investigare.*

Mod.1. Ex theoremate decimo septimo vel decimo octavo.

Ut Radius ad Sinum complementi utriuslibet catheti; ità Sinus complementi catheti reliquæ ad Sinum complementi hypotenusæ quæsitæ.

Mod. 2. Vel, retracto Radio ad secundum locum, per theorema 23.

Ut Secans utriuslibet catheti ad Radium; ità Sinus complementi alterius catheti ad Sinum complementi hypotenusæ quæsitæ.

Mod.3. Vel etiam, relicto Radio in loco primo, fiat per Secantes:

Ut Radius ad Secantem catheti alterutrius; ità Secans catheti reliquæ ad Secantem hypotenusæ inveniendæ.

Mod.4. Vel per theorema 21.

Addantur & subtrahantur invicem cathetus minor & complementum majoris. Sinusque differentiæ, vel adjungatur ad Sinum aggregati, vel eidem auferatur, prout complementum minus vel majus fuerit catheto minore; Semissis enim Sinûs provenientis est Sinus complementi hypotenusæ.

X. *Dato utroque angulo acuto; invenire hypotenusam.*

Mod.1. Ex theoremate decimo nono.

Ut Tangens utriuslibet anguli dati ad Radium; ità Tangens com-

complementi reliqui anguli ad Sinum complementi hypotenusæ quæsitæ.

Mod. 2. Vel, Radio in primum locum reposito, per theorema 24.

Ut Radius ad Tangentem complementi utriuslibet anguli dati; ità Tangens complementi anguli reliqui ad Sinum complementi hypotenusæ quæsitæ.

Mod. 3. Vel denique,

Ut Radius ad Tangentem anguli utriuslibet; ità Tangens anguli reliqui ad Secantem hypotenusæ quæsitæ.

INVENTIO ANGULORUM.

XI. Datâ hypotenusâ, & catheto, quæ opponitur angulo quæsito; indagare hunc angulum.

Mod. 1. Per theorema 17. fiat,

Ut Sinus hypotenusæ datæ ad Radium; ità Sinus catheti datæ ad Sinum anguli quæsiti.

Mod. 2. Vel, Radio ad primum locum translato, per 23. theorema.

Ut Radius ad Secantem complementi hypotenusæ datæ; ità Sinus catheti datæ ad Sinum anguli, qui quæritur.

Mod. 3. Vel tandem:

Ut Radius ad Sinum datæ hypotenusæ; ità Secans complementi datæ catheti ad Secantem complementi anguli quæsiti.

XII. Datâ hypotenusâ & catheto, quæ adjacet quæsito angulo; investigare hunc angulum.

Mod. 1. Ex theoremate decimo nono, fiat:

Ut Tangens hypotenusæ datæ ad Radium; ità Tangens catheti datæ ad Sinum complementi anguli quæsiti.

Mod.

Mod.2. Vel etiam hoc modo, ex eodem theoremate:

Ut Tangens complementi datæ catheti ad Radium; ità Tangens complementi hypotenusæ datæ ad Sinum complementi anguli quæsiti.

Mod.3. Vel, transposito ad primum locum Radio, per theor. 24:

Ut Radius ad Tangentem complementi datæ hypotenusæ; ità Tangens datæ catheti ad Sinum complementi quæsiti anguli.

Mod.4. Vel ità etiam:

Ut Radius ad Tangentem hypotenusæ datæ; ità Tangens complementi datæ catheti ad Secantem anguli, qui quæritur.

XIII. *Datâ hypotenusâ, & altero acutorum angulorum; inquirere angulum reliquum.*

Mod.1. Fiat ex theoremate decimo nono:

Ut Radius ad Tangentem anguli dati; ità Sinus complementi hypotenusæ datæ ad Tangentem complementi anguli quæsiti.

Mod.2. Vel, Radio in medium locum collocato, per 24 theorema:

Ut Tangens complementi anguli dati ad Radium; ità Sinus complementi hypotenusæ datæ ad Tangentem complementi anguli quæsiti.

Mod.3. Vel ità:

Ut Radius ad Secantem hypotenusæ; ità Tangens complementi anguli dati ad Tangentem quæsiti anguli

XIV. *Datâ utrâq; catheto; investigare angulum utrumlibet.*

Mod.1. Fiat ex theoremate decimo nono:

Ut Sinus catheti qua[...]o angulo adjacentis ad Radium; ità

Tangens catheti, eidem angulo opposita, ad Tangentem hujus anguli.

Mod. 2. Per theorema 23, ut Radius primum locum occupet:

Ut Radius ad Secantem complementi catheti, quæsito angulo adjacentis; ità Tangens catheti, angulo eidem opposita, ad Tangentem hujus quæsiti anguli.

Mod. 3. Vel aliter, per theorema 19:

Ut Radius ad Tangentem complementi catheti, quæ opponitur quæsito angulo; ità Sinus catheti, quæ eidem angulo adjacet, ad Tangentem complementi anguli quæsiti.

XV. Dato altero acutorum angulorum, & catheto, quæ reliquo opponitur; invenire hunc reliquum angulum.

Mod. 1. Ex theoremate decimo octavo fiat:

Ut Radius ad Sinum anguli dati; ità Sinus complementi datæ catheti ad Sinum complementi anguli quæsiti.

Mod. 2. Vel, Radio in medium locum reposito, per 23 theorema:

Ut Secans catheti datæ ad Radium; ità Sinus anguli dati ad Sinum complementi anguli quæsiti.

Mod. 3. vel ità:

Ut Radius ad Secantem complementi anguli dati; ità Secans catheti datæ ad Secantem anguli quæsiti.

Mod. 4. Vel, per theorema 21:

Exponantur complementum anguli dati ac data cathetus: & datum minus complemento majoris dati tum addatur, tum subtrahatur. Semissis aggregati vel differentiæ Sinuum, ùt est in theoremate, erit Sinus complementi anguli, qui postulatur.

XVI. Da-

XVI. Dato alterutro acutorum angulorum, & catheto, quæ adjacet reliquo; inquirere hunc reliquum angulum.

Mod.1. Fiat ex theoremate 17 vel decimo octavo:

Ut Sinus complementi datæ catheti ad Sinum complementi anguli dati; ità Radius ad Sinum anguli inquirendi.

Mod. 2. Vel, Radio ad primum locum deducto, per theorema 23,

Ut Radius ad Secantem catheti datæ; ità Sinus complementi anguli dati ad Sinum anguli quæsiti.

Mod. 3. Vel etiam ità:

Ut Radius ad Sinum complementi datæ catheti; ità Secans anguli dati ad Secantem complementi anguli, qui postulatur.

MONITA,

De Dimensione reliquorum Rectangulorum.

1. *Si* proponatur *triangulum rectangulum cum duobus obtusis angulis, aut cum obtuso & acuto*; solvatur utriusq; loco complementum, quod præter rectum duos habet acutos. Tale enim priori triangulo continuatis cathetis: posteriori cruribus anguli acuti continuatis opponitur, per theoremata 14 & 15.

Eadem ratio est *rectanguli*, cujus *duo latera* singulatim *quadrante majora* sunt; aut *unum majus quadrante, reliqua quadrantibus minora*. Illic enim duobus istis lateribus anguli obtusi opponuntur; hic verò obtusus & acutus, per theoremata 9 & 15.

2. *Si triangulum*, quod proponitur, est *birectangulum*: deturque præterea *angulus tertius minor vel major recto*; nullâ Trigonometriâ opus est, cùm latera angulos rectos sub-

 ten-

tendentia sint quadrantes, per theorema 12. Tertium autem latus, oppositi anguli mensura, per theorema 6. Eodem modo se res habet, *si Triangulum* sit vel datum *biquadrantale*, vel tale ex theoremate 10 agnitum. Quod *si trirectangulum* fuerit; erit quoq; triquadrantale, & contrà, per consectarium theorematis 12.

3. Quia etiam fieri potest, ut in problemate quinto *cathetus invenienda* sit *quadrante major;* postulanda ejus determinatio est. Nam, si major quadrante datur, etiam hypotenusa quadrantem excedet, per th. 10; eritque solutio instituenda ex monito primo. Eadem ratio est hypotenusæ inquirendæ in probl. 7timo. Quia enim hæc quoque quadrante major esse potest, si id ex datis, vel aliunde constat, erit etiam altera cathetus major quadrante, & solutio sub idem monitum cadet.

Triangulorum Sphæricorum Obliquangulorum Dimensio.

THEOREMATA.

25. In Triangulo sphærico, cujus omnes anguli sunt acuti, latera singula sunt quadrantibus minora.

26. Si in Triangulo sphærico latera omnia sunt quadrantibus majora; vel unum quadrans, reliqua majora quadrantibus; omnes anguli sunt obtusi.

27. Si Trianguli sphærici duo latera sunt quadrantibus minora, reliquum vel quadrans, vel majus quadrante; anguli lateribus quadrante minoribus oppositi erunt acuti; reliquus obtusus,

28. Si Trianguli sphærici obliquanguli duo anguli

ad

ad basin specie iidem fuerint, (hoc est, uterqve vel acutus, vel obtusus;) perpendicularis arcus à vertice ductus cadit intra Triangulum. Si specie diversi (hoc est, alter acutus, alter obtusus;) extra.

29. Si in Triangulo sphærico arcus perpendicularis, à vertice cujuslibet anguli demissus, cadat intra Triangulum; Sinus complementi segmentorum, quæ fiunt in basi, proportionales sunt Sinibus complementi crurum segmentis conterminorum.

30. Si in Triangulo sphærico perpendicularis arcus, à quovis angulo in basin terminatam vel productam cadat; erunt Sinus angulorum, à cruribus ac perpendiculari comprehensorum, proportionales Sinibus complementi, qui debentur angulis à cruribus ac segmentis adjacentibus comprehensis.

31. In Triangulo sphærico isosceles arcus perpendicularis à vertice ductus, tum angulum, tum basin bisecat.

PROBLEMATA

TRIANGULORUM SPHÆRICORUM OBLIQUANGULORUM.

XVII. Datis in Triangulo sphærico obliquangulo duobus angulis, & latere alteri opposito; latus reliquo dato angulo oppositum investigare.

Mod. 1. Quia hic anguli ac latera, quæ dantur & quæruntur, sibi mutuo opponuntur, ideò ex theor. 17. fiat:

Ut Sinus anguli dato lateri oppositi ad Sinum lateris dati; ità Sinus anguli quæsito lateri oppositi ad Sinum hujus quæsiti lateris.

Not. Si alter vel uterqve datus *angulus* fuerit *obtu-*

sus; sumantur eorum Sinus complementi ad semicirculos, cùm idem sit Sinus hujusmodi duorum arcuum, per theor. 1. rectilineorum.

Mod. 2. Reductione ad Rectangula.

Cas. 1. Deducatur arcus perpendicularis ab angulo ignoto in latus oppositum, *eoq; intra triangulum cadente,* (quod, quando fiat, ostendit theorema 28;) inquiratur primùm ipse arcus perpendicularis ex angulo ei opposito & latere dato, per probl. 3. hujus. Postea verò latus oppositum ex angulo reliquo & invento antè perpendiculari arcu, per probl. 7.

Cas. 2. Quod *si* arcus *perpendicularis extra* Triangulum *ceciderit,* (quod etiam theorema 28 manifestat;) eo, ùt priùs, ex opposito angulo & latere dato per probl. 1. invento; inquiratur deinde latus postulatum ex angulo reliquo dato & arcu perpendiculari jam invento, per probl. 7.

XVIII. Datis in eodem Triangulo sphærico duobus lateribus, & angulo alterutri opposito; angulum reliquo lateri dato oppositum indagare.

Mod. 1. Cùm hìc quoqve latera angulis & anguli lateribus opponantur, ùt in antecedente problemate; proportio ad quæsiti inventionem ex eodem theoremate 17 ità deducetur.

> *Ut Sinus lateris dato angulo oppositi ad Sinum anguli dati; ità Sinus lateris quæsito angulo oppositi ad Sinum anguli quæsiti.*

Not. Quod de ambiguitate quæsiti anguli probl. 9 no planorum monuimus, id hìc etiam locum habet. Quare, si ex datis, vel aliunde, constet, angulum inquirendum esse obtusum;

sum; detrahatur is, qui invento Sinui respondet, de duobus rectis: quod restat, erit obtusus quæsitus.

Mod. 2. *Reductione ad Rectangula.*

Cas. 1. Si arcus perpendicularis ab angulo datis lateribus comprehenso demissus *intra Triangulum cadat*, (quod contingit ex theoremate 28, ùt antea;) investigetur primo loco arcus ille ex angulo eidem opposito, & latere huic angulo adjacente, per probl. 1. Deinde angulus, quem volumus, ex inquisito illo arcu, & reliquo latere dato inveniatur, per probl. 11.

Cas. 2. At *si arcus perpendicularis extra Triangulum ceciderit*, (quod ex eodem theoremate cognosci poterit;) reperto primùm, perinde ùt antea, arcu isto ex dati anguli complemento ad duos rectos, & latere, quod eidem adjacet, per probl. 1; inquiratur postea angulus postulatus ex hoc ipso arcu & reliquo latere dato, per probl. 11, eodem modo, ùt priùs.

XIX. *Datis duobus lateribus Trianguli obliquanguli sphærici; (singulatim quadrante minoribus.) cum angulo ab iisdem comprehenso; latus tertium inquirere.*

Mod. 1. Ex theor. 25 operatio ità instituatur. Invento rectangulo sub sinibus rectis datorum laterum, eoq; per Radium diviso; quæratur quoqve Sinus versus tum anguli dati, tum differentiæ, quæ inter latera data intercedit, & fiat indè hujusmodi proportio:

Ut Radius ad rectangulum sub Sinibus datorum laterum Radio divisum; ità Sinus versus anguli dati ad Sinum differentialem.

Qui

Qui] Sinus ad Sinum versum differentiæ laterum additus constituit Sinum versum tertii lateris. Unde latus ipsum facilè innotescet.

Mod.2. Per Sinus rectos.

Comparentur inter se crus minus dati anguli & complementum majoris: alterumq; alteri tum addatur, tum subtrahatur. Sinus aggregati erit *Inventum primum.* Huic invento primo Sinus differentiæ addatur, *si crus magnitudine præstet complemento*; subtrahatur verò, *si cedat:* & quod colligitur, aut relinquitur, dimidietur. Dimidium erit *Inventum secundum.* Ablato deinde invento secundo ab invento primo, ut remaneat *Inventum tertium;* desumatur ex Canone Sinus complementi anguli dati, *siquidem is acutus est;* Sinus verò excessûs supra quadrantem, *si obtusus,* quorum uterq; erit *Inventum quartum.* Tum ex invento secundo & quarto instituatur hujusmodi proportio:

Ut Radius ad Inventum secundum; ità Inventum quartum ad Inventum quintum.

Hoc autem inventum quintum addatur invento tertio, *si crura* dati anguli *sint affectionis ejusdem,* (hoc est, *utrumq; vel minus, vel majus quadrante,*) *& angulus* ipse *acutus.* Vel etiam, si crura *diversæ* sint *affectionis* (hoc est, *alterum majus quadrante alterum minus,*) *& angulus,* quem continent, *obtusus.* Nam priore casu proveniet Sinus complementi lateris quæsiti: posteriore Sinus excessûs ejusdem lateris supra quadrantem. Contrà verò inventum quintum & tertium inter se subtrahantur, si data *crura* fuerint *ejusdem affectionis, & angulus obtusus.* Vel etiam, si eadem *crura diversæ affectionis* fuerint, & comprehensus *angulus acutus.* Priore enim casu differentia illorum inventorum dabit Si-

num

num excessûs lateris inquirendi supra quadrantem, siquidem inventum tertium magnitudine cedat quinto: Sinum verò complementi, si præstet. At posteriore casu dabit differentia Sinum complementi lateris quærendi, si inventum tertium cedat quinto: Sinum excessûs supra quadrantem, si præstet.

Nota, Si crus minus & complementum majoris inter se æquentur; idem est inventum secundum & tertium. Reliqua autem se habent, ût jam expositum est.

Modus 3. *Reductione ad Rectangula.*

Deducatur perpendicularis arcus ab alterutro angulo ignoto in latus oppositum, *eoq; intra Triangulum cadente*; inquiratur hic arcus unà cum segmento lateris, dato angulo adjacente, & quidem ex hoc ipso angulo alteroqve latere dato per probl. 1 & 2dum Sphæricorum. Subtracto deinde segmento invento de toto latere pro basi assumpto; investigetur postea latus quæsitum ex reliquo segmento, & arcu perpendiculari jam acquisito, per probl. 9. Quod *si* arcus perpendicularis *extra Triangulum ceciderit*; eo itidem ex latere reliquo & complemento dati anguli ad duos rectos investigato, per probl: 1. ùt etiam segmento externo per probl. 2; addatur id lateri pro basi assumpto, atqve ex aggregato arcuq; perpendiculari latus postulatum per probl. 9. inquiratur, siquidem & aggregatum & latus inveniendum quadranti cedant. At si alterum vel utrumq; quadrantem superet, peragenda operatio est, ùt monita Rectangulis Sphæricis subjuncta ostendunt.

XX. *Datis omnibus lateribus Trianguli obliquanguli, angulum à quibuslibet duobus lateribus singulatim quadrante minoribus comprehensum investigare.*

Mod. 1. Ex Theoremate 20 res ità peragatur. Diviso rectangulo sub cruribus quæsiti anguli per Radium, inveniatur tum Sinus versus basis, sive tertii lateris, tum differentiæ crurum, minorq; de majori subtrahatur. Pòst, in regula trium numerorum proportio ità ordinetur:

Ut rectangulum sub cruribus anguli quæsiti Radio divisum ad ipsum Radium; ità differentia inter Sinum versum differentia crurum ad Sinum versum anguli inquirendi.

Hujus igitur Sinus rectus per problemata generalia inventus dabit angulum, quem volumus.

Mod. 2. Addantur inter se & subtrahantur crus minus anguli inquirendi & complementum majoris, eritq; Sinus aggregati *Inventum primum.* Tum detracto Sinu differentiæ ab hoc invento primo, *si complementum* magnitudine *præstet cruri*; addito ad idem inventum, *si cedat*; dimidietur id, quod utrobiqve provenit. Dimidium erit *Inventum secundum. Inventum* autem *tertium* dabit Sinus complementi basis sive lateris tertii, *ubi* id *(latus) quadrante minus* est: Sinus excessus, *ubi majus.* Pòst auferatur Inventum tertium à primo, *quoties basis deficit à quadrante*: addatur verò ad primum, *quoties quadrantem superat.* Quod relinquitur aut colligitur erit *inventum quartum.* Denique ex invento secundo & quarto instituatur hujumodi proportio:

Ut

Ut Inventum secundum ad Inventum quartum; ità Radius ad Sinum versum anguli quæsiti: hoc est, ad Inventum quintum.

Indè igitur deductus Sinus rectus exhibebit angulum quæsitum, qui acutus erit, si inventus Sinus versus Radio cedat; obtusus, si præstet.

Nota: Si crus minus & complementum majoris inter se æquentur; erit dimidium inventi primi Inventum secundum; cum nullus tunc adsit Sinus differentiæ.

Mod. 3. Si quis Sinibus rectis uti malit; rem ità instituat. Deducta operatione hujusmodi, usqve dum prodeat inventum secundũ, quod invento primo additum vel subductum relinquat *Inventum tertium*; comparentur inter se hoc ipsum inventum tertium & Sinus complementi basis sive tertii lateris, fiatqve minoris de majori subtractio, *si basis quadranti cedit.* At *si basis quadrantem superet;* addatur Sinus excessûs ad Inventum tertium. Quod hic producitur, aut à Subtractione superiori relinquitur, est *Inventum quartum.* Indè autem fiat talis proportio:

Ut Inventum secundum ad inventum quartum: Ità Radius ad Inventum quintum.

Hoc autem inventum quintum est Sinus complementi anguli quæsiti, *cùm basis deficit à quadrante, ejusq́; Sinus complementi invento tertio præstat.* Contrà verò Inventum quintum est Sinus excessûs anguli inquirendi supra quadrantem, *cùm basis est quadrante major;* aut si minor, *cum ejusdem* (basis) *Sinus complementi Invento tertio cedit.* Tunc enim Inventi quinti arcus 90 gradibus additus angulum quæsitum exhibebit.

MONITA ad hoc & proximè præcedens problema.

1. *Si crura dati vel quæsiti anguli inter se æqualia sint;* habeatur alterum pro minori, & fiant cetera, uti dictum est in problemate.

Vel etiam: demittatur arcus perpendicularis à vertice illius anguli in latus oppositum, qui perpetuo in latus medium cadet, indeqve inveniatur quæsitum per problemata rectangulorum præcedentia.

2. *Si crus unum dati vel quæsiti anguli quadrans fuerit;* producatur quoq; alterum latus usqve ad quadrantem, & duo hi quadrantes arcu ex vertice anguli descripto jungantur. Ità enim triangulum dato contiguum constituetur, in quo complementum producti cruris & descriptus arcus angulum rectum continebunt: latus autem quæsitum per probl: 9 innotescet; & angulus ex inventa ejus mensura, arcu nempe quadrantes jungente per probl. 3.

3. *Si alterum crus anguli dati vel quæsiti quadrantem excedat;* continuentur singula latera usqve ad semicirculos; ita enim eorum complementa triangulum exhibebunt, in quo dati ac quæsiti anguli crura singula quadrantibus latera minora.

4. *Si deniq; utrumq; crus quadrante majus detur;* loco propositi trianguli solvatur ejus complementum; ità in omni datorum varietate quæsito satis fiet.

XXI. *Datis Trianguli obliquanguli omnibus angulis, invenire latera.*

Mod. 1. Commutentur per theor: 22, ejusqve consectarium dati anguli in latera, assumto loco anguli obtusi ejus

ejus complemento ad duos rectos f: 180. Hinc velut ex datis lateribus inquirantur per probl: proximè antecedens ipsi anguli, quæ lateribus quæsitis æquivalebunt, per idem Theor.

Not: Ut hæc enallage sive commutatio laterum & angulorum rectè procedat, observandum illud est, quod theoremate 7mo ejusqve consectario continetur. Si enim ea requisita desint, frustra hic modus tentatur.

Mod. 2. Reductione ad Rectangula.

Cas. 1. Demittatur arcus perpendicularis à dato maximo angulo in latus oppositū: *Quicum intra triangulū cadat*, assumātur Sinus complementorum duobus reliquis angulis debiti, iiqve invicem addantur ac subtrahantur. Deinde bisecetur angulus, unde deductus est arcus perpendicularis; inventaq; Tangente bisegmenti, proportio ex theor: 9; planorum (quod in sphæricis quoqve Triangulis quandoqve locum habet:) vel potius ex theoremate 30 hujus ità instituatur:

> *Ut summa Sinuum complementorum ad differentiam eorundem: ità Tangens dimidii anguli, unde demissus est perpendicularis arcus, ad Tangentem differentiæ, qua major angulus à perpendiculari factus superat hoc dimidium, minor ab eodem deficit.*

Si igitur arcus huic Tangenti respondens ad dimidium illud addatur, indeq; etiam subtrahatur, prodibunt duo anguli, in quos maximus angulus à perpendiculari secatur. Et hinc porrò crura hujus anguli invenientur per problema 10 hujus; segmenta autem basis per probl. 6.

Cas. 2. Quod *si arcus perpendicularis* non ex maximo angulo, sed quovis alio deducatur, isqve *extra triangulum cadat*, proportio hoc modo est ordinanda: